

25 Novembre 2014

Dans ce TP nous présentons un exemple simple de résolution approchée d'un problème aux limites de l'équation de la chaleur en dimension 2, par la méthode des éléments finis programmée sous Matlab.

On considère une pièce en contact en ses bords Γ_1 et Γ_2 , avec des sources thermiques de même température $u = 0^\circ\text{C}$.

La géométrie du domaine est le carré $[0, 1]^2$ (figure (1)).

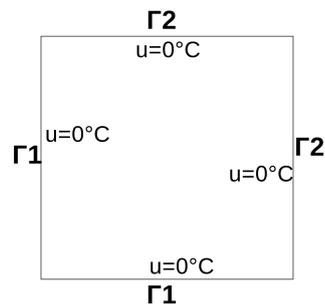


FIGURE 1 – Conditions aux limites de type Dirichlet

A l'instant initial, la répartition de température dans cette pièce est donnée par : $u_0(x, y) = 2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

A un instant t et à un noeud (x, y) quelconques, la température $u(t, x, y)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \text{ dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[. \quad (1)$$

($\alpha = 1.e - 5 \text{ m}^2/\text{s}$ est la diffusivité thermique du matériau constituant la pièce.)

Le but du programme qu'on va faire est de calculer l'évolution jusqu'au régime permanent, de la répartition de la température dans la pièce, de deux façons :

- Solution éléments finis avec un schéma d'intégration temporelle implicite.
- Solution analytique.

A un instant donné, on observe la répartition suivante de la température dans la pièce, par un calcul éléments finis (figure (2)) :

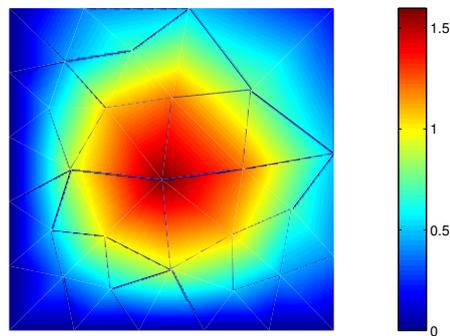


FIGURE 2 – Répartition de la température à un instant t pour des conditions aux limites de type Dirichlet

Le programme principal (fichier exemple.m dans le répertoire TP-ES-EF) sera composé des parties suivantes :

1. Lecture du maillage : On considère un maillage de petite taille pour illustrer la méthode des éléments finis.
 - Lecture du tableau PosNoeuds de coordonnées (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N$ des N noeuds du maillage ($N = 34$).
 - Création de la triangulation de Delaunay de l'ensemble des noeuds grâce à la fonction Delaunay sous Matlab et numérotation globale des degrés de liberté par triangle.
2. Détermination des vecteurs Lbord et Lbordprime des noeuds respectifs sur les deux parties Γ_1 et Γ_2 du bord du domaine.
3. Appel à une fonction thermique-transitoire.m qui calculera la solution approchée du problème (1), et la stockera dans une matrice dont le nombre de lignes est celui des degrés de liberté et le nombre de colonnes est celui des pas de temps.

4. Appel à une fonction solution-analytique.m qui calculera la solution analytique du problème (1).
5. Appel à la fonction dessinisoq.m dans le répertoire TP-ES-EF, qui tracera les solutions numérique et analytique, au cours du temps.
6. Comparaison des résultats.

Function thermique-transitoire.m

Formulation variationnelle implicite en temps

Montrer que la solution du problème (1) vérifie :

$$\int_{\Omega} u^{m+1} v d\Omega = -dt\alpha \int_{\Omega} \nabla u^{m+1} \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} u^m v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Où, u^{m+1} désigne la température à un instant t^{m+1} , et dt le pas de temps.

Nous voulons résoudre le problème (2) sur un sous-espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$, de dimension N (égale au nombre de noeuds du maillage), qu'on notera V^N .

Autrement dit, on cherche $u_N \in V^N$ telle que :

$$\int_{\Omega} u_N^{m+1} v_N d\Omega = -dt\alpha \int_{\Omega} \nabla u_N^{m+1} \nabla v_N d\Omega + \int_{\Omega} u_N^m v_N d\Omega \quad \forall v_N \in V_N. \quad (3)$$

Passage à un système matriciel

Soit (Φ_1, \dots, Φ_N) une base de V^N .

Montrer que $U_N^{m+1} = \sum_{n=1}^N u_n \Phi_n$ est solution du problème (3) si et seulement

le vecteur $U^{m+1} = (u_1, \dots, u_N)^T$ est solution d'un système linéaire que l'on mettra sous forme matricielle $A.U^{m+1} = B$. Où, A est une matrice carrée de dimension $N \times N$ et B est un vecteur colonne.

```

Start fonction thermique-transitoire;
Calcul de la matrice A;
Durée de la simulation;
Pas de temps;
Condition initiale;
Pour chaque pas de temps;
    Calcul du second membre B;
    Pour les noeuds Lbord et Lbordprime sur le bord de Dirichlet;
        On met à zéro le second membre  $B_{Lbord}$  et  $B_{Lbordprime}$ ;
        On met à zéro les termes extradiagonaux sur les lignes ;
        et les colonnes Lbord et Lbordprime de A;
     $U^{m+1} = A \setminus B$  ;
End fonction thermique-transitoire.

```

Compléter le fichier thermique-transitoire.m, par le calcul de la matrice A et l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

Le calcul de A sera fait par l'intermédiaire d'une fonction assemblage.m :

Function assemblage.m

Le but est de choisir V^N de sorte que le système linéaire précédent soit rapide à résoudre. Alors, on va essayer d'obtenir une matrice A la plus creuse possible.

On note K un triangle quelconque du maillage.

Choix de l'espace V^N

Soit $(\Psi_i)_{i=1,\dots,N}$ les fonctions dans V^N (figure (3)) telles que : $\forall K, \Psi_i|_K$ est linéaire, et :

$$\Psi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

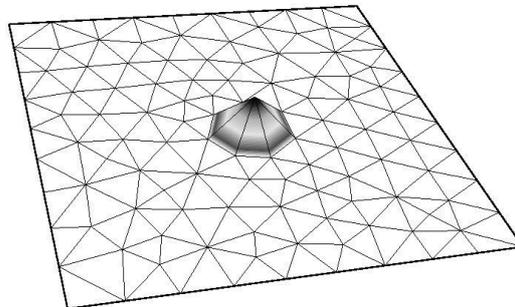


FIGURE 3 – Un élément de la base $(\Psi_i)_{i=1,\dots,N}$

Montrer que Ψ forme une base de V^N .

Formulation élémentaire pour évaluer la matrice A

Montrer que pour le choix de la base Ψ , la matrice A est creuse en remarquant que : $\forall i, j = 1, \dots, N, A_{ij} = \sum_K A_{ij}^K$. Où, $A_{ij}^K = \int_K \Psi_i \Psi_j dK + dt\alpha \int_K [\nabla_{(x,y)} \Psi_i]^T [\nabla_{(x,y)} \Psi_j] dK$.

Une telle formulation nécessite la mise en mémoire de points d'intégration différents d'un élément à l'autre. Pour contourner cette difficulté, on introduit un élément \hat{K} dit de référence, sur lequel on effectue toutes les intégrales nécessaires à l'évaluation du système élémentaire, et ce au moyen d'un changement de variables.

Passage à l'élément de référence

Pout tout élément triangulaire K , on cherche à évaluer les intégrales élémentaires $A_{ij}^K, \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que (x_i, y_i) et (x_j, y_j) sont connectés sur K , en effectuant un changement de variables sur l'élément de référence \hat{K} défini par le triangle dont les trois côtés sont : $y = 0, x = 0$ et $y = 1 - x$.

Soit P la matrice dont les lignes sont les coordonnées des noeuds connectés sur un élément K :

$$P = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_l & y_l \end{pmatrix}$$

Soit T^K une application linéaire définie sur \hat{K} à valeurs dans K :

$$T^K: \hat{K} \rightarrow K$$

$$(\xi, \eta) \mapsto (x, y) = \left(\sum_{i=1}^3 P_{i1} \hat{\Psi}_i(\xi, \eta), \sum_{i=1}^3 P_{i2} \hat{\Psi}_i(\xi, \eta) \right).$$

Où, $\hat{\Psi}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \hat{\Psi}_2(\xi, \eta) = \xi$ et $\hat{\Psi}_3(\xi, \eta) = \eta$.

Grâce à la transformation T^K , on est capable de faire un changement de variables pour évaluer les intégrales élémentaires.

La matrice jacobienne de la transformation T^K est alors :

$$DT^K = \begin{pmatrix} P_{21} - P_{11} & P_{31} - P_{11} \\ P_{22} - P_{12} & P_{32} - P_{12} \end{pmatrix}$$

Expliciter les intégrales élémentaires sur l'élément de référence \hat{K} en effectuant le changement de variables par la transformation T^K .

Evaluer ces intégrales par la méthode de quadrature de Gauss. Pour cela, on choisit trois points de Gauss sur l'élément de référence : $(\xi_1, \eta_1) = (1./6, 1./6)$,

$(\xi_2, \eta_2) = (1./6, 2./3)$ et $(\xi_3, \eta_3) = (2./3, 1./6)$. Avec respectivement les poids $w_1 = w_2 = w_3 = 1./6$. Alors, l'intégrale d'une fonction f sur \hat{K} est égale à :

$$\int_{\hat{K}} f d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i f(\xi_i, \eta_i).$$

Function solution-analytique.m

On veut calculer une solution analytique du problème (1). On recherche en général des solutions par la méthodes de séparation des variables, c'est à dire de la forme : $u(t, x, y) = X(x)Y(y)T(t)$.

Une solution analytique de l'équation de la chaleur 2D avec des conditions Dirichlet au bord est :

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \alpha t) 2 \sin(n\pi x) \sin(n\pi y).$$

Où, $a_n = \int_0^1 \int_0^1 u_0(x, y) 2 \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) dx dy.$

```
Start function solution-analytique;
Durée de la simulation;
Pas de temps;
Condition initiale;
Pour chaque pas de temps;
    Pour chaque noeud;
        solution analytique ;
    End function solution-analytique.
```

Changement des conditions aux limites

Calculer la solution numérique pour des conditions aux limites de type Robin, sur la partie Γ_1 du bord du domaine :

$$u(t, x, y) + h \nabla u(t, x, y) \cdot \vec{n}(x, y) = 0.$$

Où, $h = 10$.

Cette condition aux limites veut dire que les deux murs de Γ_1 sont en contact avec l'extérieur où la température est de 0°C , par l'intermédiaire de deux fenêtres ouvertes, (figure(4)). Aussi, la pièce se refroidira au fur et à mesure.

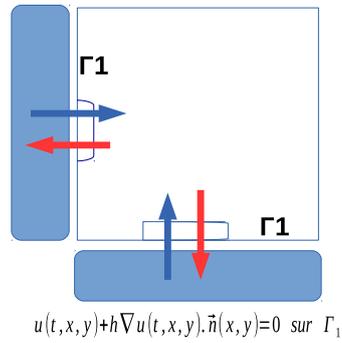


FIGURE 4 – Conditions aux limites de type Robin

Nous considérons dans ce cas une condition initiale uniforme : $u_0(x, y) = 24^\circ\text{C}$.

A un instant t , la répartition de la température dans la pièce, calculée par la méthode des éléments finis est donnée dans la figure (5) :

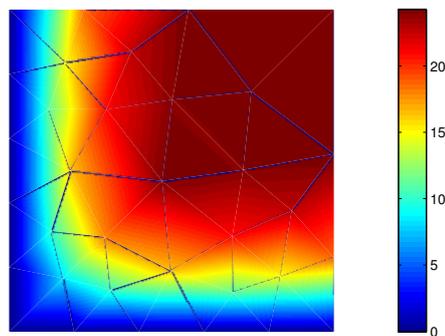


FIGURE 5 – Répartition de la température à un instant t pour des conditions aux limites de type Robin