ENSMP 2ème/3ème année, Cours d'éléments finis, 22–26 novembre 2010

Modèle de Heston de volatilité stochastique

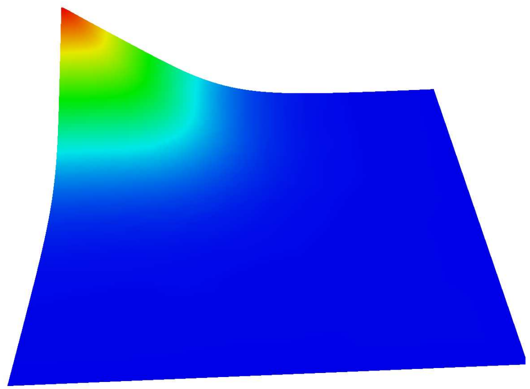
Une option européenne sur un produit risqué est un contrat donnant le droit d'acheter (on parle de « call »), ou de vendre (on parle alors de « put »), une action du produit à un prix fixé, et à une date donnée.

Le prix d'une option européenne (un « put » pour fixer les idées) est décrit par l'équation de Black-Scholes si l'on suppose que la (ou les) volatilité(s) (mesure de l'ampleur des variations) du (ou des) actif(s) est (ou sont) constante(s) sur une période de temps fixée. Il s'agit d'une équation d'évolution donnant le prix de l'option en fonction du prix du (ou des) sous-jacents et du temps restant jusqu'à maturité. Dans la pratique, le modèle de Black-Scholes se compare mal aux prix observés. Une manière d'enrichir le modèle est de considérer des coefficients de volatilité stochastiques, i.e. dépendants du temps. Les hypothèses probabilistes, et la dérivation des équations correspondantes sont décrites par exemple dans le livre [2].

Le but du projet est de mettre en oeuvre des méthodes de calcul par éléments finis dans le cas d'une option européenne, d'abord dans le cas d'une option sur un panier composé de deux sous-jacents à volatilités constantes, puis dans le cas d'une option sur un sous-jacent à volatilité stochastique.

Code utilisé : *FreeFem++*

Mots-clés : *Modèle financier, options, Équation de Black-Scholes, volatilité stochastique*



Présentation

Dans le cas d'un « put » européen pour une option sur un panier composé de deux produits sous-jacents, l'équation de Black-Scholes s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} + rS_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - rP = 0 \quad t \in [0,T],\ S_1, S_2 > 0, \tag{1}$$

avec la condition *finale* $P(S_1,S_2,T) = P_T(S_1,S_2)$. K est le prix d'exercice de l'option, σ_1 et σ_2 sont les coefficients de *volatilité* supposées constants sur $[0,T]$, ρ est le facteur de corrélation entre S_1 et S_2, et r est le taux d'intéret sans risque. On pourra prendre, par exemple, pour P_T l'une des formes suivantes :

$$P_T(S_1,S_2) = \max(K-(S_1+S_2),0),\ \text{ou } P_T(S_1,S_2) = \max(K-\max(S_1,S_2),0).$$

On considère à présent une option sur un sous-jacent à *volatilité stochastique*, i.e. $\sigma_t = \sigma(Y_t)$ où Y_t est un processus stochastique possiblement corrélé à S_t. On s'intéresse ici au modèle de Heston de volatilité stochastique où $\sigma_t = \sqrt{Y_t}$ et Y_t est un processus de Cox-Ingersoll-Ross. Dans ce cas, on peut démontrer que le prix d'une option européenne $P(S_t,Y_t,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma(Y)^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \rho\lambda S\sqrt{Y}\sigma(Y)\frac{\partial^2 P}{\partial S\partial Y} + \frac{\lambda^2 Y}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}\\ &+r\left(S\frac{\partial P}{\partial S} - P\right) + \alpha(m-Y)\frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad 0 \le t \le T, S>0, Y \in \mathbb{R}^+,\end{aligned} \tag{2}$$

avec la condition *finale* $P_T(S,Y) = \max(K-S,0)$. α, m et λ sont des constantes positives, qui sont respectivement le taux de retour à la moyenne, la moyenne à long terme et le coefficient de diffusion de la volatilité, et ρ est le facteur de corrélation entre S_t et Y_t.

Travail proposé

Modèle de Black-Scholes

– Proposer une discrétisation en temps par Euler implicite en traitant les termes du premier ordre par la méthode des caractéristiques.
– Écrire *soigneusement* la formulation variationnelle du problème semi-discrétisé.
– Écrire un programme avec FreeFem pour calculer la solution. On utilisera la fonction `convect` pour l'intégration en temps. On prendra dans un premier temps

$$K = 100,\ r = 0.05,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0.2, \rho = 0.5.$$

Pour les conditions aux limites, on prendra des conditions de Neumann "artificielles" pour $S_1 = S_2 = 0$, et on pourra considérer que $P = 0$ pour S_1 et S_2 « grands » (de l'ordre de $L = 300$).
– Pour valider ce programme, on se placera dans la situation où la solution ne dépend pas de S_2, et on la comparera à la solution exacte, donnée par la formule de Black-Scholes. Vérifier la convergence

numérique lorsque l'on raffine le maillage.
- Mettre en évidence l'effet du raffinement automatique du maillage en utilisant la fonction `adaptmesh`.
- Faire varier les paramètres du modèle.

Modèle de Heston

- Réécrire le problème en effectuant le changement de variable $Y \rightarrow \frac{Y}{1+Y} = \tilde{Y}$ afin de ramener $\mathbb{R}^+$ à l'intervalle $[0,1]$. On notera $Q(S_t, \tilde{Y}_t, t)$ le prix de l'option après changement de variable.
- Proposer une discrétisation en temps par Euler implicite en traitant les termes du premier ordre par la méthode des caractéristiques.
- Écrire *soigneusement* la formulation variationnelle du problème semi-discrétisé.
- Écrire un programme avec FreeFem pour calculer la solution. On utilisera la fonction `convect` pour l'intégration en temps. On prendra

$$T = 1,\, K = 100,\, r = 0.05,\, \alpha = 1,\, m = 0.2,\, \lambda = 0.5, \rho = -0.5.$$

  Pour les conditions aux limites, on prendra des conditions de Neumann "artificielles" pour $S = \tilde{Y} = 0$, $Q = 0$ pour S « grand » (de l'ordre de $L = 300$), et $Q = K(1 - \frac{S}{L})$ pour $\tilde{Y} = 1$.
- Représenter la solution obtenue avec les variables de départ en utilisant la fonction `movemesh`. A votre avis, quel est l'intérêt du changement de variable ? Comment aurait-on pu contourner le problème ?

Références

[1] Y. Achdou, O. Bokanowski and T. Lelièvre *Partial differential equations in finance*, Rapport de recherche - CERMICS n° 363, Septembre 2007.

[2] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, 1997.