Éléments finis

M. Kern

PC 2

Exercice I Éléments finis en dimension 1 On considère le problème :

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 1 \end{cases}$$

où p et q sont définies et bornées sur $[0,1]$, avec $p(x) \geq p_\star > 0$, $q(x) \geq 0$, et $f \in L^2(0,1)$.

1) En donner une formulation variationnelle. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

2) Posons $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbf{N}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, et

$$V_h = \{v_h \in C^0([0,1]),\ v_h \in P_1 \text{ sur }]x_j, x_{j+1}[, \forall j,\ v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

Vérifier que $V_h \subset H_0^1(]0,1[)$. Montrer qu'il existe une fonction unique de v_h telle que

$$w_j(x_j) = 1; \quad w_j(x_i) = 0, \quad i \neq j$$

et que $(w_j)_{j=1,N}$ est une base de v_h. Donner l'expression de w_j.

On définit l'opérateur d'interpolation I_h associé au maillage précédent. Étant donné une fonction $v \in H^1(0,1$, on note $I_h v$ la fonction de V_h qui prend les mêmes valeurs que v aux points su maillage :

$$I_h v \in V_h,\ I_h v(x_j) = v(x_j),\ \forall j = 1, \ldots, N.$$

3) Écrire le problème approché. Former les intégrales permettant de calculer la matrice et le second membre du problème approché. Achever le calcul dans le cas où $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, et où l'on remplace f par son interpolée.

Exercice II Estimation de l'erreur On reprend les notations de l'exercice précédent. On veut majorer l'erreur entre la solution exacte u et la solution approchée u_h. On notera $\|u\|_1 = \left(\int_0^1 |u'(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$ la norme sur $H_0^1(0,1)$. On fait l'hypothèse (de régularité) $u'' \in L^2(0,1)$.

1) Montrer que $\|u - u_h\|_1 \leq C \|u - I_h u\|_,$ avec une constante $C > 0$.

2) On note $e_j = (u - I_h u)_{|[x_j, x_{j+1}]}$. En utilisant $e_j(x_j) = e_j(x_{j+1}) = 0$, montrer qu'il existe $\xi \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que $e'_j(x) = \int_\xi^x e''_j(t)\,dt$. En déduire que

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|e'_j(x)\right|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|u''(x)\right|^2 dx.$$

3) Conclure que

$$\|u - I_h u\|_1 \leq h \left(\int_0^1 \left|u''(x)\right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Exercice III **Élément fini P_2** Soit T un triangle. On note (N_1, N_2, N_3) les sommets, N_4 resp (N_5, N_6) un point de l'arête $[N_1, N_3]$ (resp. $[N_3, N_1]$, $[N_1, N_2]$) à choisir.

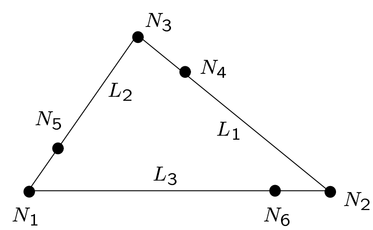

FIG. 1 – Triangle P_2

On note L_i l'équation de la droite qui définit le côté $3 - i$ (la fonction affine telle que un point est sur la droite $N_1 N_2$ ssi $L_3 = 0$). On note P_2 l'espace des polynômes de degré ≤ 2.

1) Quelle est la dimension de P_2 ?

2) Soit P un polynôme en (x, y) de degré $d \geq 1$ qui s'annule sur une droite L. Montrer qu'on a $P = LQ$, où Q est un polynôme de degré $d - 1$.

3) Montrer qu'il existe une unique fonction de P_2 prenant des valeurs données aux points $(N_i)_{i=1,\ldots,6}$.

Exprimer les fonctions de base (prenant la valeur 1 en un point et 0 au 5 autres) en fonction des coordonnées barycentriques sur le triangle.

4) Soit deux triangles adjacents : Comment doit-on placer les points N_4, N_5, N_6 pour qu'une fonction P_2 sur chaque triangle soit *continue* sur $T_1 \cup T_2$?

Exercice IV **Rectangle à 8 noeuds** On considère un rectangle à 8 noeuds (figure 3), et l'espace de polynômes

$$P = \left\{ p \in Q_2,\, 4p(G) + \sum_{i=1}^{4} p(A_i) - 2\sum_{i=1}^{5} p(A_i) = 0 \right\}.$$

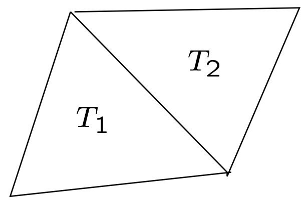

FIG. 2 – Deux triangles adjacents

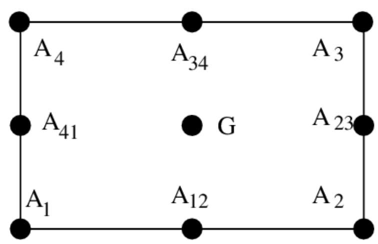

FIG. 3 – Triangle P^2 bulle

1) Montrer que $P_2 \subset P$.

2) Montrer que l'élément de Lagrange correspondant est P unisolvant. Calculer les fonctions de base de cet élément.

3) Montrer que cet élément fini est conforme H^1.

Exercice V Un élément fini « non standard »

Étant donné un triangle K, on note b la fonction « bulle » (faire un dessin pour expliquer le nom de cette fonction)

$$b(x,y) = \lambda_1(x,y)\lambda_2(x,y)\lambda_3(x,y)$$

On note P l'espace de polynomes de la forme

$$P = \left\{ p = p_2 + \alpha b, p_2 \in P^2, \alpha \in \mathbf{R} \right\}$$

1) Quelle est la dimension de P ? Montrer que $P_2 \subset P \subset P_3$, et que l'ensemble suivant est P unisolvant

2) Montrer, avec un minimum de calcul, que cet élément est conforme H^1.

Exercice VI Laplacien dans un carré

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

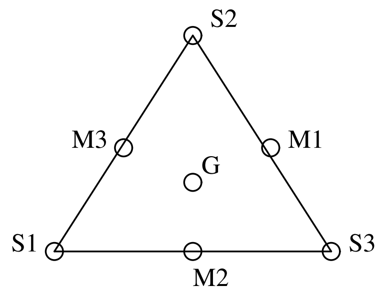

FIG. 4 – Triangle P^2 bulle

On discrétise le problème par éléments finis P_1, en prenant un maillage régulier du carré Ω de pas $h = 1/(N+1)$.

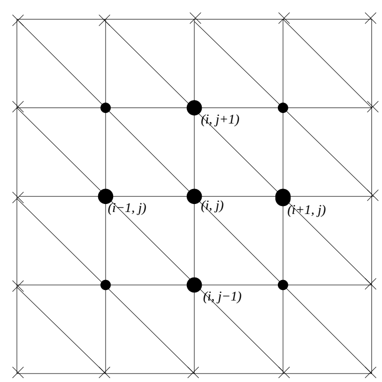

FIG. 5 – Maillage régulier du carré unité

On note $M_{ij} = (ih, jh), i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, N$ les points du maillage, et φ_{ij} la fonction de base associée au point M_{ij}.

1) Donner la formulation variationnelle de ce problème.

2) Quel est le support de φ_{ij} ? Écrire l'expression de φ_{ij} et des ses dérivées partielles dans chacun des triangles contenus dans le support.

3) Pour les couples (k,l) tels que supp $\varphi_{ij} \cap$ supp $\varphi_{kl} \neq \emptyset$ calculer $\int_\Omega \nabla\varphi_{ij} \nabla\varphi_{kl}$.
En déduire les équations du système discrèt.

4) On adopte une numérotation des inconues par colonne ;

$$U = (U_{11}, U_{21}, \ldots, U_{N,1}, U_{12}, \ldots, U_{ij} \ldots, U_{1,N}, \ldots, U_{N,N}).$$

Écrire la matrice du système.