Éléments finis

M. Kern

PC 1

Exercice I Lien avec le calcul des variations Soit p et q deux fonctions continues (pour simplifier) sur $]0,1[$, et $f \in L^2(0,1)$. On pose, pour $u \in C1(0,1)$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ p(x)\, u'(x)^2 + q(x)\, u(x)^2 - f(x)u(x) \right\} dx,$$

et on considère le problème

$$\text{minimiser } J \text{ sous les conditions } u(0) = u(1) = 0.$$

1) Pour $v \in C^1(0,1)$, $v(0) = v(1) = 0$, calculer $J'(u)v$ et écrire une condition nécessaire pour que J ait un minimum en u. Interprétation ? Donner des conditions sur p et q assurant l'existence d'une solution (dans un cadre hilbertien), et montrer que cette solution réalise le minimum strict de J sur $H_0^1(0,1)$.

2) En supposant les fonctions p et q de classe C^1, écrire l'équation d'Euler du problème.

Exercice II Problème mixte Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^2$. On note Γ la frontière de Ω, et on suppose que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\mathrm{mes}(\Gamma_1) > 0$ (il s'agit de la mesure superficielle sur Γ, faire un dessin). Soit $f \in L^2(\Omega)$, et soit $g \in L^2(\Gamma_2)$.

On considère le problème, où a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, & \dfrac{\partial u}{\partial n} + au = g \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

1) Donner la formulation variationnelle de ce problème

2) Donner une condition suffisante sur a pour que ce problème ait une solution unique.

Exercice III Problème de Dirichlet non-homogène Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^2$, Γ son bord. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$, on considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g_{|\Gamma} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

1) Montrer comment on peut se ramener à un problème de Dirichlet homogène. En donner une formulation variationnelle.

2) Écrire un problème de minimisation dont u est solution. On posera $H^1_g = \{u \in H^1(\Omega), u_{|\Gamma} = g\}$.

Exercice IV Quelques exemples en dimension 1

1) Inégalité de Poincaré

Démontrer l'inégalité de Poincaré en dimension 1 : il existe une constante $C_P > 0$ telle que :

$$\forall v \in H^1_0(0,1),\ \int_0^1 |f(x)|^2\, dx \leq C_P \int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 dx.$$

2) Un problème non–coercif

Soit

$$a(u,v) = \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x)\, dx, \quad \text{pour } (u,v) \in H^1_0(0,1).$$

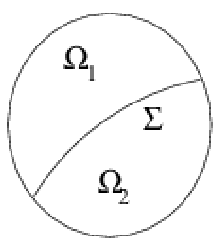
Montrer qu'il n'existe pas de constante $C_1 > 0$ telle que

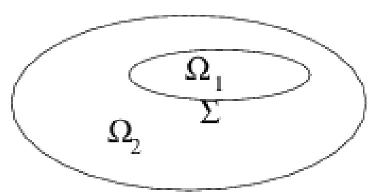
$$a(u,u) \geq C_1 \int_0^1 \left|u'(x)\right|^2 dx, \text{ pour tout } u \in H^1_0(0,1).$$

Exercice V Problème de transmission

Soit Ω un ouvert (borné, régulier) de $\mathbf{R}^2$, constitué de deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une interface Σ : $\Omega = \Omega_1 \cup \Sigma \cup \Omega_2$.

Voici deux situations possibles :





Soit $k \in L^\infty(\Omega)$, on note k_i la restriction de k à Ω_i. On suppose que $k_i \in C^0(\overline{\Omega}_i)$, mais k peut être discontinu à travers Σ.

Posons

$$a_i(u,v) = \int_{\Omega_i} k_i \nabla u \nabla v dx \quad \text{pour } (u,v) \in H^1(\Omega_i)^2$$

et

$$a(u,v) = a_1(u,v) + a_2(u,v) = \int_\Omega k \nabla u \nabla v dx, \quad (u,v) \in H^1(\Omega)^2$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$, $V = H^1_0(\Omega)$. On note u la solution du problème variationnel :

$$u \in V, \quad a(u,v) = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in V.$$

1) Sous quelle hypothèse sur k a-t'on existence et unicité de u ?

2) Soit $u \in L^2(\Omega)$ et u_1, u_2 ses restrictions à Ω_1, Ω_2. Montrer que

$$u \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \in H^1(\Omega_1), \quad u_2 \in H^2(\Omega_2), \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

En choisissant dans la formulation variationnelle $v = \varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, donner l'équation vérifiée par u_i dans Ω_i.

3) En utilisant la formule de Green, montrer que $k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$ sur Σ.