Un peu de modélisation…

Frédéric Feyel
ONERA - DMSE/LCME

- Mécanique
- Électricité
- Thermique
- Finance

Mécanique

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{div}}\underset{\sim}{\sigma} + \underline{\mathbf{b}} = \mu\underline{\dot{\mathbf{u}}} + \rho\underline{\ddot{\mathbf{u}}} \\ \mathrm{CL} \\ \mathrm{LDC} \end{cases}$$

$$\int_\Omega \delta\underline{\mathbf{u}}.\mu\underline{\dot{\mathbf{u}}} + \int_\Omega \delta\underline{\mathbf{u}}.\rho\underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \int_\Omega \delta\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\sigma} - \int_\Omega \delta\underline{\mathbf{u}}.\underline{\mathbf{b}} - \int_{\Gamma_t} \delta\underline{\mathbf{u}}.\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\forall \delta\underline{\mathbf{u}}$$

ONERA

Propagation électromagnétique

Libres Liées

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_c + \dfrac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}} = \rho \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{A}}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\underline{\mathrm{grad}}V - \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Indétermination : Jauge de Lorentz (choix !)

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{A}} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

ONERA

Propagation en potentiels

Matière lin. Hom. isotrope
$$\begin{cases} \underline{\mathbf{B}} &= \mu \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{D}} &= \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{J}}_c &= \sigma \underline{\mathbf{E}} \end{cases}$$
(Ohm)

$$\begin{cases} \Delta V - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\rho/\varepsilon \\ \Delta \underline{\mathbf{A}} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} &= -\mu \underline{\mathbf{J}} \end{cases}$$

Conduction

Bilan d'énergie pour un système

Chaleur aux frontières

Travail aux frontières

$$dE + dU = dQ + dW$$

Chaleur interne (réactions chimiques)

Énergie interne (réactions chimiques)

Conduction

Pour un « petit » volume, champs homogènes

$$dE = \int_{\Omega} -P d\Omega$$

Densité de chaleur volumique

$$dU - dW = dH = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega$$

$$dQ = \int_{\partial\Omega} -\underline{\mathbf{J}}.\underline{\mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} \mathrm{div} \underline{\lambda \nabla \mathbf{T}} d\Omega$$

Fourier

$$\mathrm{div} \underline{\lambda \nabla \mathbf{T}} - \rho c \dot{T} = -P$$

ONERA

Finances : Black-Scholes

Option (« Warrants ») : possibilité d'acheter ou de vendre à un cours prédeterminé

- Prix de l'actif S(t)

Mvt Brownien

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \boxed{dW_t}$$

Rendement

Volatilité

ONERA

Formule d'Ito : différentielle du prix de l'option

$$dC = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW$$

Black & Scholes : portefeuille fictif P

$$P = -\underbrace{C}_{\text{Une options}} + \Delta \underbrace{S}_{\text{Actions}}$$

$$dP = -\left(\mu S \boxed{\left(\Delta - \frac{\partial C}{\partial S}\right)} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \boxed{\left(\Delta - \frac{\partial C}{\partial S}\right)} \sigma S dW$$

Portefeuille sans risque
=0

Non arbitrage : ==

Placement au taux d'intérêt r :

$$dP = rPdt = r\left(-C + S\frac{\partial C}{\partial S}\right) dt$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + C - S\frac{\partial C}{\partial S} = 0$$